

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS ESPECÍFICOS ASOCIADOS A FUNCIONES NO LINEALES

Andrés Alcolea^{*}, Agustín Medina^{*}

^{*} ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, Universidad Politécnica de
Cataluña, Barcelona, España.

Campus Norte UPC, 08034 Barcelona, España

e-mail: balcolea@etseccpb.upc.es

e-mail: medina@etseccpb.upc.es

Palabras clave: Hidrología Subterránea, Problema Inverso, Flujo No Saturado, Parámetros Específicos, Van Genuchten.

Resumen. *El problema inverso en hidrología subterránea consiste en la estimación de los parámetros de un modelo a partir de las respuestas del sistema (niveles, concentraciones, etc.) y de información previa sobre los propios parámetros, tanto físicos (permeabilidad, almacenamiento específico, etc.) como específicos de alguna función no lineal empírica que controla la evolución de los parámetros físicos en función de la variable de estado. Su uso es frecuente en la modelación de procesos en la zona no saturada. El inconveniente se halla en el elevado grado de incertidumbre que presentan estos parámetros específicos y que, en la mayoría de los casos, controlan sobremanera la respuesta del modelo.*

1 INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones que gobiernan la resolución de problemas de flujo de agua en medio poroso pueden presentar distintos tipos de no linealidad. Por ejemplo, en medio saturado y acuífero libre, la transmisividad es proporcional al nivel piezométrico. Es decir, algunos parámetros de dichas ecuaciones pueden depender de la variable de estado. Para la descripción de dicha dependencia se emplean diversas relaciones empíricas entre los parámetros de la ecuación y la variable de estado. Estas dependencias suelen expresarse por medio de funciones no lineales.

Se han realizado numerosos estudios^{1,2,3} para intentar obtener distintas curvas de ajuste tratando de reproducir la variabilidad de los parámetros en función de la variable de estado. Asimismo, se han llevado a cabo gran cantidad de aplicaciones referentes a la resolución del problema directo no lineal (simulación)^{4,5}.

La problemática asociada a este tipo de funciones es la aparición de parámetros de ajuste en sus expresiones, a veces, sin sentido físico alguno. Además, generalmente, el grado de incertidumbre que presentan es elevado y controla sobremedida la evolución de la variable de estado, dando lugar, en ocasiones, a graves errores en la predicción de los modelos. Así, resulta útil disponer de una herramienta capaz de proporcionar una buena estimación de este tipo de parámetros (a ser posible de forma automática), a partir de datos sobre la respuesta del sistema real y, si es posible, sobre los parámetros del modelo, bien sean hidráulicos, como transmisividad, coeficiente de almacenamiento, etc, o específicos de las funciones no lineales que relacionan algunos de los parámetros hidráulicos con la variable de estado. Con este propósito, se ha actualizado un código de elementos finitos que únicamente permitía la estimación de parámetros hidráulicos.

En el presente artículo se muestra una breve revisión de la teoría asociada a los problemas directo no lineal e inverso, con la descripción de las funciones no lineales propuestas por Van Genuchten¹. Finalmente se aplica el código a un ejemplo sintético de flujo en medio no saturado, empleando las funciones no lineales antes mencionadas y comentando los resultados.

2 FLUJO NO LINEAL. FORMULACIÓN

La herramienta más recurrida para estudiar el movimiento del agua a través de medios porosos es la ley de Darcy (1856). Esta ley establece que el flujo de agua entre dos puntos, en un medio saturado, es proporcional al gradiente de potencial que existe entre ellos. En forma vectorial, puede escribirse como:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K}\nabla h \quad (1)$$

donde \mathbf{q} [LT^{-1}] es el vector de la velocidad media del flujo, \mathbf{K} [LT^{-1}] es el tensor de conductividad hidráulica del medio y h [L] es el nivel piezométrico, cuyo significado físico es energía por unidad de peso de fluido. Este término se puede expresar en función de sus componentes: la gravitatoria o de posición (z) y la de presión ($p/\rho g$), siendo z [L] la altura sobre un nivel de referencia, p [FL^{-2}] la presión de fluido, ρ [ML^{-3}] la densidad y g la

aceleración de la gravedad.

Por otra parte, la ecuación de conservación de masa establece el balance de fluido sobre un volumen de control, en un instante dado como ⁶:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho\mathbf{q}) + \rho q_r \quad (2)$$

en la que ϕ es la porosidad drenable del medio, q_r [T^{-1}] es un término fuente/sumidero y t [T] es el tiempo. Combinando las dos expresiones anteriores, se obtiene la ecuación de flujo para un medio saturado:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{K} \nabla \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \right] + \rho q_r \quad (3)$$

En el desarrollo de las anteriores ecuaciones, se ha supuesto que los poros del medio se encontraban completamente ocupados por el fluido (medio saturado). En medio parcialmente no saturado, se sigue suponiendo válida la ley de Darcy, pero teniendo en cuenta que la masa de fluido contenido por unidad de volumen de medio es:

$$M = \rho\theta \quad (4)$$

siendo θ el contenido volumétrico de agua, definido como el volumen de poros ocupados por el fluido, respecto del volumen total de los mismos. A partir de las expresiones (3) y (4), se obtiene:

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{K} \nabla \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \right) + \rho q_r \quad (5)$$

Como se esbozó en la introducción, se sabe que la conductividad hidráulica depende del grado de saturación, por lo que ésta se suele escribir como el producto de dos componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}^s \mathbf{K}^r(S_w) \\ S_w &= \frac{\theta}{\phi} \end{aligned} \quad (6)$$

donde \mathbf{K}^s es el tensor de permeabilidades correspondiente al estado de saturación y \mathbf{K}^r es una función no lineal llamada permeabilidad relativa, que depende del grado de saturación S_w . Aplicando la regla de la cadena a la ecuación anterior se obtiene:

$$\left(\phi \frac{\partial S_w}{\partial \psi} + S_w \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\mathbf{K}^s \mathbf{K}^r(S_w) \nabla (\psi + z) \right] + q_r \quad (7)$$

Por otra parte, la variación de masa en el sistema (5), se produce por deformación elástica del medio, bien sea por variación de porosidad (cambios en la presión ocasionan

modificaciones en la estructura del medio) o por efecto de la compresibilidad del líquido (variaciones de densidad). Si se supone nula la variación de la densidad, la variación de masa se puede expresar en función del almacenamiento específico S_s , definido como el volumen de agua liberado o absorbido por unidad de volumen de acuífero y por unidad de tiempo, cuando se produce una variación unitaria en el nivel piezométrico:

$$S_s = \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \quad (8)$$

De esta forma, la ecuación (7) se transforma en:

$$\left(\phi \frac{\partial S_w}{\partial \psi} + S_w S_s \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\mathbf{K}^s \mathbf{K}^r (S_w) \nabla(\psi + z) \right] + q_r \quad (9)$$

No es posible la resolución de la ecuación anterior de forma analítica más que en unos pocos casos sencillos, debiendo recurrir a técnicas de solución numérica. En el presente caso, la discretización se realiza separadamente en el espacio y en el tiempo. En el espacio se discretiza mediante elementos finitos, mientras que el tratamiento temporal se realiza según diferencias finitas ponderadas. Así pues, tras algunas manipulaciones, la ecuación anterior adquiere la expresión siguiente ^{4,5,6,7}:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\psi}^{k+\varepsilon}) \boldsymbol{\psi}^{k+\theta} + \mathbf{D}(\boldsymbol{\psi}^{k+\varepsilon}) \frac{\boldsymbol{\psi}^{k+1} - \boldsymbol{\psi}^k}{\Delta t} = \mathbf{b}^{k+\theta}(\boldsymbol{\psi}^{k+\varepsilon}) \quad (10)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{D} son matrices que dependen de la forma de los elementos, de los parámetros de flujo (conductividad hidráulica y almacenamiento específico respectivamente) y del vector variable de estado $\boldsymbol{\psi}$ a través de las funciones no lineales; \mathbf{b} es un vector que engloba los términos fuente/sumidero, y que, de la misma forma, depende de la variable de estado.

En la expresión anterior, la ponderación temporal de la variable de estado se realiza mediante el escalar θ , mientras que las matrices \mathbf{A} y \mathbf{D} se evalúan con el valor de la variable de estado en el tiempo $k+\varepsilon$. En un instante cualquiera $k+\beta$, se tiene que:

$$\mathbf{h}^{k+\beta} = \beta \mathbf{h}^{k+1} + (1-\beta) \mathbf{h}^k \quad (11)$$

El método utilizado para la resolución de la ecuación (10) es el de Newton-Raphson completo, pues las matrices necesarias para la resolución de las ecuaciones de problema inverso no lineal (según la formulación adoptada) son las mismas que las utilizadas en la resolución del problema directo no lineal. No obstante, caso de resolverse únicamente el problema directo, pueden usarse aproximaciones, como las del método de Newton-Raphson modificado, el método de la tensión inicial, etc.

En definitiva, se trata de hallar un vector de incógnitas Ψ , de forma que la función vectorial de error \mathbf{f} se anula, según la expresión siguiente:

$$\mathbf{f}(\Psi^{k+\varepsilon}) = \mathbf{A}(\Psi^{k+\varepsilon})\Psi^{k+\theta} + \mathbf{D}(\Psi^{k+\varepsilon}) \frac{\Psi^{k+1} - \Psi^k}{\Delta t} - \mathbf{b}^{k+\theta}(\Psi^{k+\varepsilon}) = \mathbf{0} \quad (12)$$

Durante el proceso de resolución se actualiza el vector ${}^{k+1}\Psi^{l+1}$ según una estrategia incremental iterativa (superíndice a la izquierda denota tiempo, superíndice a la derecha representa número de iteración). Dicha estrategia se basa en la aproximación de Taylor de primer orden a la función de error \mathbf{f} :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}({}^{k+1}\Psi^m + {}^{k+1}\Delta\Psi^{m+1}) &= \mathbf{f}({}^{k+1}\Psi^m) + \mathbf{J}({}^{k+1}\Psi^m) {}^{k+1}\Delta\Psi^{m+1} = \mathbf{0} \\ \mathbf{J}({}^{k+1}\Psi^m) &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial {}^{k+1}\Psi^m}({}^{k+1}\Psi^m) \end{aligned} \quad (13)$$

En la expresión anterior, \mathbf{J} es la matriz jacobiana de la función de error (según autores, matriz tangente, pues contiene las derivadas primeras). Así, la solución del problema directo no lineal (12) se reduce a la resolución de un sistema de ecuaciones lineal, el cual se resuelve de forma iterativa hasta obtener convergencia.

3 PROBLEMA INVERSO. FORMULACIÓN

El problema inverso consiste en obtener el mejor estimador de los parámetros de la ecuación que representa el sistema físico, utilizando información previa sobre los mismos (obtenida, por ejemplo, mediante ensayos de laboratorio, documentación al respecto o por experiencia previa), su estructura de correlación y sobre la propia variable de estado.

El problema inverso en el contexto de las aguas subterráneas ⁸, consiste en la estimación de los parámetros de un acuífero (trasmisividad, coeficiente de almacenamiento, etc.), a partir de medidas directas de los mismos y de variables dependientes de los mismos, tales como niveles, concentraciones, etc.

Existen diversas formulaciones del problema inverso ^{9,10,11}. En lo que sigue, se adopta la basada en el método estadístico de la Máxima Verosimilitud ¹², incluyendo información previa. Por completitud, en este apartado se presentan las características básicas del método. Para un mayor nivel de detalle, se puede consultar la bibliografía especificada.

La verosimilitud $L(\mathbf{p} | \mathbf{z}^*)$ de una hipótesis sobre los valores de los parámetros \mathbf{p} , dados los datos $\mathbf{z}^* = (\mathbf{h}^*, \mathbf{p}^*)$ y una estructura del modelo prefijada, se define como proporcional a $f(\mathbf{z}^* | \mathbf{p})$ función de densidad de probabilidad de haber observado \mathbf{z}^* dados los parámetros \mathbf{p} . Así, la estimación empleando el método de máxima verosimilitud consiste en hallar los parámetros \mathbf{p} (hipótesis) de forma que $L(\mathbf{p} | \mathbf{z}^*)$ sea máxima. Para completar los datos, es necesario especificar el vector \mathbf{z}^* y la estructura de correlación o de error en dicho vector.

En adelante, se supondrá que la estructura del error sigue una distribución multi-Gaussiana con media nula, con lo que dicha estructura quedará perfectamente definida mediante la matriz de covarianza. Esta hipótesis se basa en el teorema central del límite, según el cual la

distribución de un gran número de pequeños errores aleatorios en las medidas (\mathbf{z}^*), se puede aproximar mediante una distribución multi-Gaussiana. Además, la hipótesis de la multinormalidad permite el cálculo de intervalos de confianza de la estimación de los parámetros y la realización de tests de significación ⁸.

Es conveniente suponer la matriz de covarianza como:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_h &= \sigma_h^2 \mathbf{V}_h \\ \mathbf{C}_i &= \sigma_i^2 \mathbf{V}_i \end{aligned} \quad (14)$$

donde \mathbf{C}_h y \mathbf{C}_i son la matriz de covarianzas de niveles observados y la asociada al parámetro i -ésimo, respectivamente; \mathbf{V}_h y \mathbf{V}_i son matrices conocidas y definidas positivas y σ_h^2 y σ_i^2 son escalares desconocidos.

Con las hipótesis anteriores y suponiendo la distribución multi-Gaussiana antes comentada, la verosimilitud de \mathbf{p} dado \mathbf{z}^* , se expresa como:

$$L(\mathbf{p}|\mathbf{z}^*) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\mathbf{C}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-\mathbf{z}^*)^t \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{z}^*)\right\} \quad (15)$$

siendo N el número de datos disponibles y \mathbf{C} la matriz de covarianza. En general, dado que las medidas de niveles y la información previa sobre los parámetros no están correlacionadas, puede suponerse que la matriz \mathbf{C} presenta la siguiente estructura:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_h & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_p \end{pmatrix} \quad (16)$$

donde la matriz \mathbf{C}_p incluye las correlaciones entre todos los parámetros y es diagonal por bloques, suponiendo que las estimaciones previas de los diferentes parámetros no estén correlacionadas.

Hallar el máximo de $L(\mathbf{p}|\mathbf{z}^*)$ es equivalente a hallar el mínimo de:

$$S = -2\ln(L(\mathbf{p}|\mathbf{z}^*)) \quad (17)$$

Si:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_h &= (\mathbf{h}-\mathbf{h}^*)^t \mathbf{V}_h^{-1}(\mathbf{h}-\mathbf{h}^*) \\ \mathbf{J}_i &= (\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_i^*)^t \mathbf{V}_i^{-1}(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_i^*) \end{aligned} \quad (18)$$

y se sustituye la expresión anterior en (17), se obtiene que:

$$S = \frac{J_h}{\sigma_h^2} + \sum_i \frac{J_i}{\sigma_i^2} + \ln|\mathbf{V}_h| + \sum_i \ln|\mathbf{V}_i| + n_h \ln \sigma_h^2 + \sum_i n_i \ln \sigma_i^2 + N \ln(2\pi) \quad (19)$$

donde n_h es el número de datos de niveles y n_i el número de datos sobre el parámetro i -ésimo. Suponiendo conocida la estructura de correlación (matrices \mathbf{C}_h y \mathbf{C}_i), la expresión (19) se reduce a:

$$S = J_h + \sum_i \lambda_i J_i + \text{constante} \quad (20)$$

$$\lambda_i = \frac{\sigma_h^2}{\sigma_i^2}$$

En este caso, la formulación del problema inverso, en su formulación de Máxima Verosimilitud, se reduce a la minimización de la expresión (20), convirtiéndose en un problema de optimización. Para ello, se ha adoptado el método de Marquardt ¹³, si bien existen numerosas alternativas como el método de Simulated Annealing ^{14,15}, métodos híbridos ^{16,17}, etc.

4 DESCRIPCIÓN DE LAS FUNCIONES NO LINEALES DE VAN GENUCHTEN

Van Genuchten ¹ propuso dos tipos de funciones no lineales, una para la permeabilidad y otra para el grado de saturación, ambas función del nivel piezométrico. A continuación se describen dichas funciones y los parámetros implicados. La permeabilidad relativa se calcula como:

$$K^r(S_w) = \sqrt{\frac{S_w - S_{\min}}{S_{\max} - S_{\min}}} \left[1 - \left(1 - \left(\frac{S_w - S_{\min}}{S_{\max} - S_{\min}} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^\lambda \right]^2 \quad (21)$$

donde S_w es el grado de saturación del medio, S_{\max} y S_{\min} son las saturaciones máxima y mínima, respectivamente y λ es un parámetro de ajuste que controla la forma más o menos abrupta de la curva. El grado de saturación viene dado por la expresión:

$$S_w(h) = S_{\min} + (S_{\max} - S_{\min}) \left[1 + \left(\frac{h}{h_c} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right]^{-\lambda} \quad (22)$$

donde h_c es la presión capilar. Esta última representa el valor mínimo de la presión de la

fase gaseosa en el medio, para que ésta penetre en los poros del medio, desplazando así el fluido (inicio del proceso de desaturación) ⁵. En forma gráfica, podemos observar la sensibilidad de las distintas curvas al parámetro específico λ donde, por comodidad, se utiliza en el eje horizontal de las gráficas la saturación específica, definida como:

$$S_e = \frac{S_w - S_{\min}}{S_{\max} - S_{\min}} \quad (23)$$

Obsérvese que la saturación específica adquiere valores entre 0 y 1, correspondiendo el primer valor al estado de saturación mínima (medio no saturado) y el valor unidad al de saturación máxima (medio saturado).

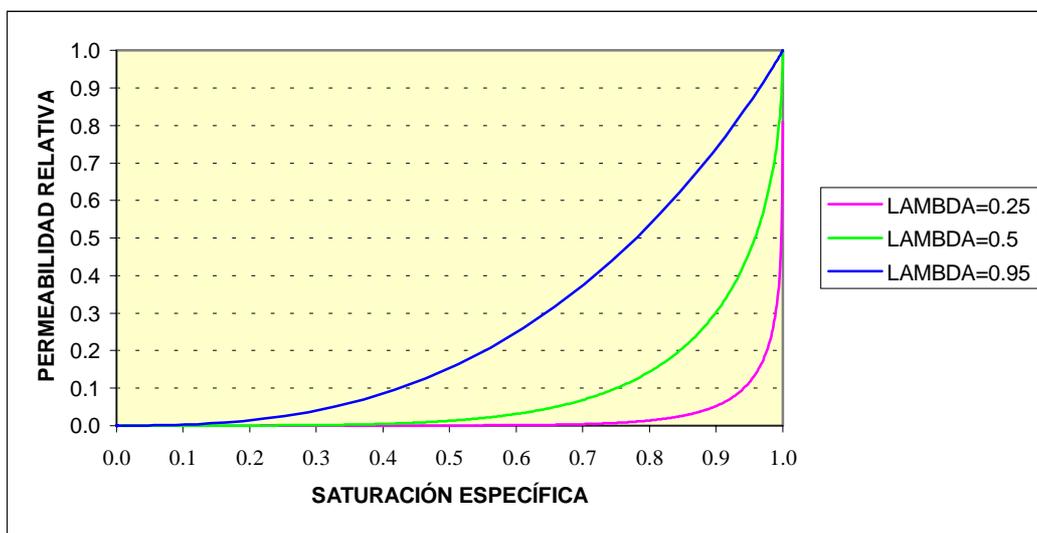


Figura 1: Sensibilidad de la permeabilidad relativa al parámetro específico λ

Considérese, por ejemplo, un valor de 0.95 para la saturación específica. La permeabilidad relativa del medio adquiere valores de 0.1, 0.45 y 0.85 para valores del parámetro específico 0.25, 0.5 y 0.95 respectivamente. Esto implica que una reducción del valor de λ implica una reducción de la permeabilidad total del medio, si se mantienen inalterados el resto de condiciones y parámetros.

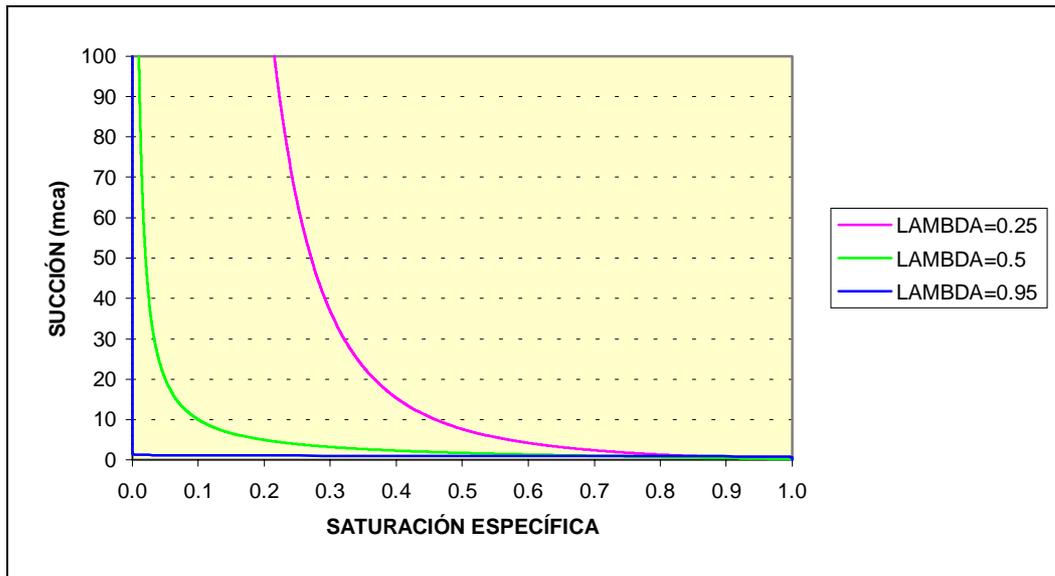


Figura 2: Sensibilidad de la curva de retención al parámetro λ

Considérese ahora un valor 0.5 para la saturación específica. La succión adquiere valores de unas pocas atmósferas para valores elevados del parámetro específico (0.95 y 0.5), mientras que adquiere un valor próximo a diez atmósferas para un valor pequeño de λ (0.25). En la figura 2 se observa la gran sensibilidad de la variable de estado al valor del parámetro específico.

Para este tipo de funciones no lineales, el parámetro λ podría considerarse como una medida de la velocidad de saturación del medio: un valor del parámetro próximo a 0 implica que el medio no comienza a saturarse (succión próxima a cero) hasta que el grado de saturación es próximo al máximo (la saturación específica tiende a la unidad). En cambio, un valor de λ próximo a la unidad permite que el medio comience a saturarse para valores de saturación específica inferiores.

5 EJEMPLO

La metodología descrita se aplica a la modelación de la infiltración de agua en una columna de suelo de 1 metro de longitud, en estado no saturado, con un nivel piezométrico inicial de valor -1 m. Se considera una condición de contorno de nivel prescrito en la superficie inferior, de valor 0 m, que se corresponde con un estado saturado. Por otra parte, en dicha columna se produce una entrada de agua constante a través de su superficie superior, de valor 10^{-2} l/día.

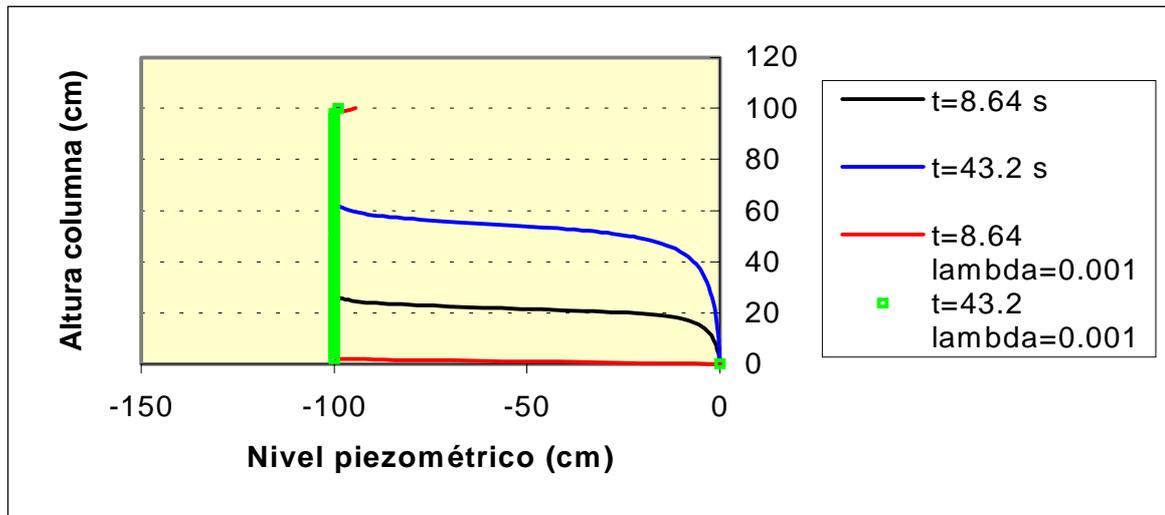


Figura 3. Evolución del nivel piezométrico en función del tiempo y del parámetro λ .

En la figura anterior puede observarse la evolución del nivel piezométrico en función del tiempo (se presentan los resultados para un estado próximo al inicial y para otro algo más avanzado), para dos valores muy distintos del parámetro λ ($\lambda=10^{-3}$ y $\lambda=10^{-1}$). Obsérvese que el aumento súbito del nivel en la base inferior de la columna, conlleva dificultades de convergencia del método de Newton-Raphson. En dicha figura puede observarse también la gran sensibilidad de la variable de estado a variaciones en el valor de λ . Mientras un valor próximo a cero de dicho parámetro ($\lambda=10^{-3}$) dificulta la saturación del medio, un valor de 10^{-1} permite la paulatina saturación del medio a medida que avanza el tiempo.

Pasamos ahora a analizar la calibración del parámetro λ . Para ello se necesitan unas medidas y cierta información previa sobre los parámetros.

La metodología empleada para analizar la calibración se puede resumir en dos pasos: a partir de la estructura del modelo que acabamos de presentar y unos valores asignados a los parámetros (que serán los “reales”), se resuelve el problema directo (simulación), obteniéndose en ciertos puntos del dominio los “valores reales” del nivel piezométrico. Los “valores medidos” se obtienen añadiendo a los “reales” un ruido Gaussiano de media nula y desviación impuesta, con el que se pretende simular el error de medida que conlleva el proceso de obtención de datos.

Se presentan los resultados para ruidos con desviaciones tipo $\sigma=0$, $\sigma=0.01$ y $\sigma=0.1$ (este último valor representa la introducción de un “error” de medida de $\pm 68\%$ del valor del nivel piezométrico inicial). Como valor inicial de λ se toma uno muy distinto al del valor “real” (aquel con el que se realizó la simulación y de donde se tomaron las medidas).

Los resultados se presentan en la tabla siguiente, donde se puede observar que, pese al error inicial en el parámetro, consigue alcanzarse el valor “real” del mismo:

	$\sigma=0$	$\sigma=0.01$	$\sigma=0.1$
Función objetivo inicial	1.043E+11	1.035E+05	9.316E+02
Función objetivo final	3.014E+06	1.067E+01	8.789E+00
λ calibrado	0.098807796	0.098793091	0.10030929
λ inicial	0.001	0.001	0.001
λ "real"	0.1	0.1	0.1
Número de iteraciones	16	10	18

Tabla 1 : Valores obtenidos en el proceso de calibración.

Para el primer caso ($\sigma=0$) se observa una gran diferencia en comparación con los valores de función objetivo obtenidos con mayores desviaciones, dado que el código utilizado no acepta un valor nulo de la misma. Así, se utiliza un valor de $\sigma=10^{-5}$, lo que provoca un mayor valor en la función objetivo.

Además de comparar el valor de λ calculado con el valor "real", la calidad de la calibración se puede contrastar comparando los niveles "medidos" con los calculados. En las figuras siguientes se compara el valor "real" del nivel piezométrico en función del tiempo con el valor obtenido tras la calibración. Se presentan los resultados para el ruido de desviación nula y para el ruido de desviación $\sigma=0.1$, donde se dibujan en línea continua las curvas "reales", y en punteado las obtenidas tras el proceso de calibración de λ .

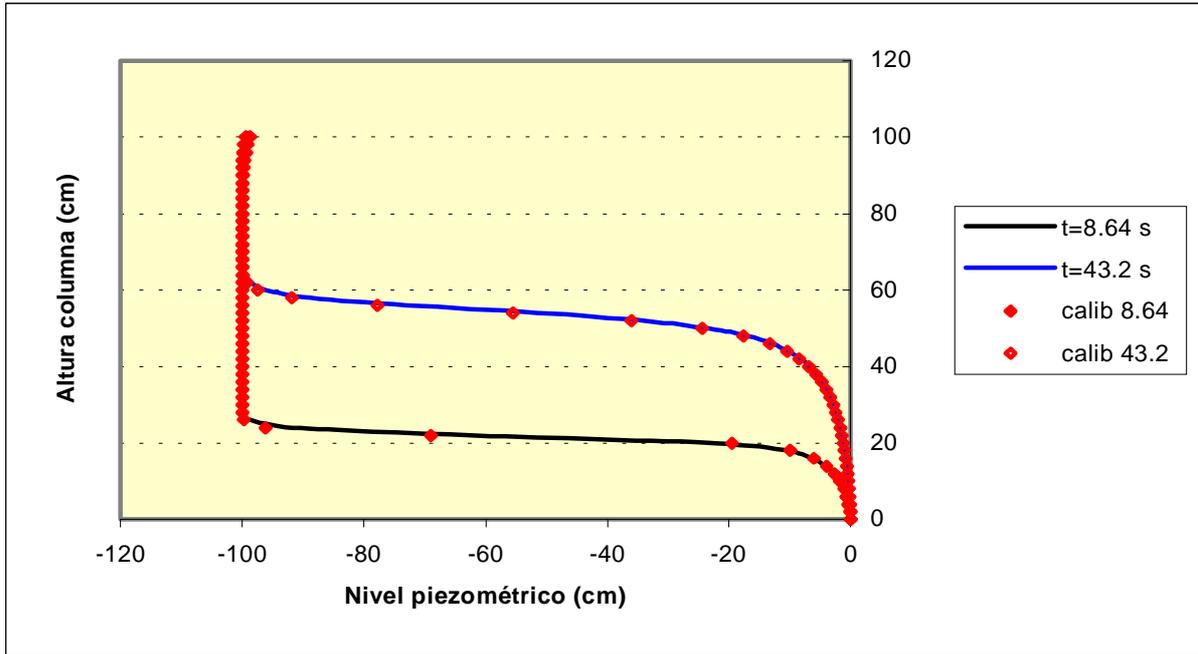


Figura 4. Resultados tras la calibración de λ , con ruido de desviación $\sigma=0$

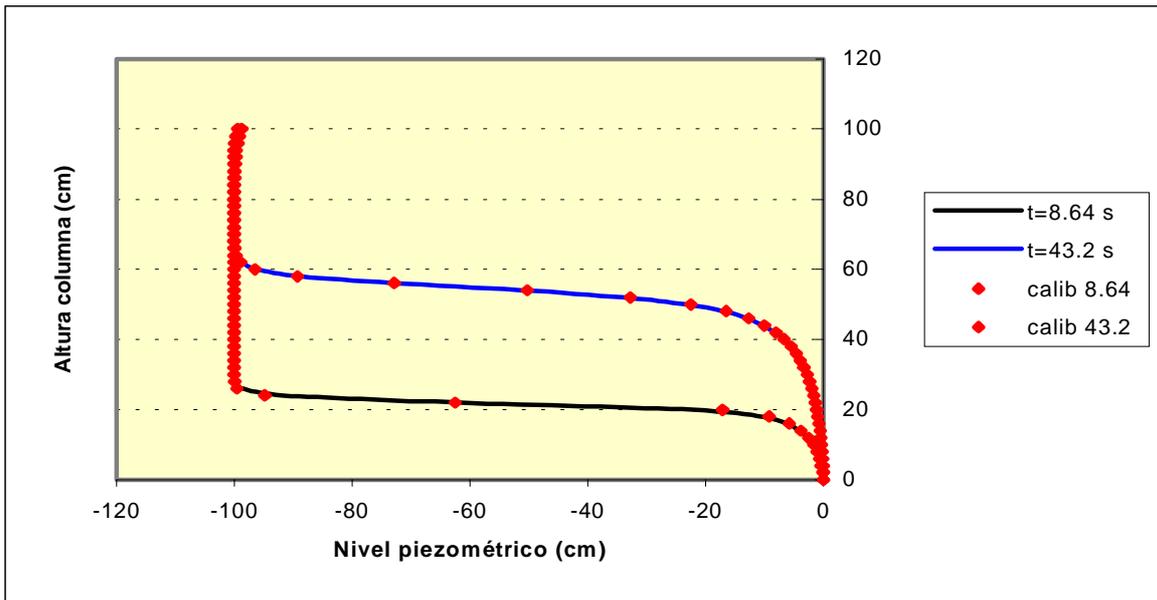


Figura 5. Resultados tras la calibración de λ , con ruido de desviación $\sigma=0.1$

6 CONCLUSIONES

Se ha presentado un método para la estimación de parámetros específicos, empleando el método de la máxima verosimilitud. Este método lleva a la minimización de una función objetivo, operación llevada a cabo mediante el método de Marquardt, tal como se ha planteado (minimización sin restricciones). Así, pueden obtenerse valores de λ inferiores a cero o superiores a la unidad, inadmisibles desde el punto de vista físico. Así, la solución es también sensible al valor inicial del parámetro que se imponga.

Tras analizar las respuestas del modelo, resulta evidente que la sensibilidad de la variable de estado a los valores del parámetro específico, es crítica a la hora de modelar procesos en la zona no saturada. Resulta pues necesario el desarrollo de herramientas de cálculo, que permitan obtener una buena estimación del valor de dichos parámetros, así como estudios posteriores referentes a las restricciones antes comentadas.

REFERENCIAS

- [1] M. Th. Van Genuchten and D. R. Nielsen, "On describing and predicting the hydraulic properties of unsaturated soils", *Ann. Geophys.*, **3**, 615-628 (1985).
- [2] P. Broadbridge and I. White, "Constant rate rainfall infiltration: a versatile nonlinear model. 1. Analytic solution". *Water resources research* , **24(1)**, 145-154 (1988).
- [3] W.J. Rawls and D.L. Brakensiek, "Estimation of soil water retention and hydraulic properties", de *Unsaturated Flow in Hydrologic Modelling. Theory and practice*, Kluwer Academic Publishers, 275-300 (1989).
- [4] G. Galarza, A. Medina and J. Carrera, *Transin III. Fortran code for solving the coupled non-linear flow and transport inverse problem. User's guide*, de *El Berrocal Project. Topical Reports*, ENRESA, 424-680 (1996).
- [5] G.F. Pinder y W.G. Gray, *Finite element simulation in surface and subsurface hydrology*. Academic Press, Inc. (1977)
- [6] J. Bear, *Dynamics of fluids in porous media*, Dover Publications (1972).
- [7] P.S. Huyakorn and G.F. Pinder, *Computational methods in subsurface flow*. Academic Press, Inc. (1983)
- [8] J. Carrera, A. Medina and G. Galarza, "Groundwater inverse problem. Discussion on geostatistical formulations and validation", *Hydrogeologie*, **4**, 313-324 (1993).
- [9] S. Finsterle and J. Najita, "Robust estimation of hydrogeologic model parameters", *Water Resources Research*, Vol. **34** (11), pp.2939-2947 (1998).
- [10] A. Medina, *Estimación conjunta de parámetros de las ecuaciones de flujo y transporte*, Tesis Doctoral, ETSICCPB.
- [11] J. Carrera y S.P. Neuman, "El problema inverso de la hidrología subterránea. Estado del arte y método de solución", *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, **2(1)** , 3-25 (1986).

- [12] J. Carrera and S.P. Neuman, “Estimation of aquifer parameters under Transient and Steady-State Conditions. I. Maximum Likelihood Method Incorporating Prior Information”, *Water Resources Research*, **22**(2), 199-210 (1986).
- [13] D.W. Marquardt, “An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters”, *J. Soc. Indust. Appl. Math*, **11**(2) 1963.
- [14] P.J.M. Laarhoven y E.H.L Aarts, *Simulated annealing: theory and applications*, Kluwer Academic Publishers, (1987).
- [15] C.V. Deutsch, “ Conditioning reservoir models to well test information”, *Proceedings Geostatistics Troia’92*, **1**, 505-518 (1992).
- [16] A. Alcolea, A. Medina and J. Carrera, “A hybrid Marquardt-Simulated Annealing method for solving the groundwater inverse problem”, *Proceedings ModelCare’99* (en prensa).
- [17] T. Renyuan et al., “ Combined strategy of Improved Simulated Annealing and Genetic algorithm for Inverse Problem”, *IEEE Transactions on Magnetics*, **32** (1), 1326-1330 (1992).